

# Les réseaux de Modules d'Unités de Transferts, thermique, massique, outils pertinents d'analyse de séchoirs

P. SEBASTIAN, J. P. NADEAU et J. R. PUIGGALI

L.E.P.T.-ENSAM, URA-C.N.R.S. 873, Esplanade des Arts et Métiers. 33405 Talence Cedex France

(Reçu le 12 juillet 1991 et sous forme finale le 19 mars 1992)

**Résumé**—Nous calculons différemment certains Nombres d'Unités de Transfert établis précédemment [Sebastian *et al.*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, HMT398] en vue de leur application à l'analyse physique des séchoirs. Pour ce faire nous introduisons le concept de réseaux de Modules d'Unités de Transferts. Nous illustrons ce concept par l'observation d'un séchoir multi-tapis, pour montrer qu'il est un outil pour la conception des séchoirs.

## 1. INTRODUCTION

LES NOMBRES d'Unités de Transfert de séchage sont des intégrales adimensionnelles construites autour des équations de conservation, dans des volumes où s'opèrent des transferts de masse et de chaleur [1–3]. Leur intégration n'est possible qu'avec des modèles réalistes de transferts directement liés à l'échelle des volumes, et à la nature des transferts. Nous résolvons ici les problèmes qui se posent en abandonnant les modèles de transferts linéaires du type de ceux utilisés auparavant [4], ou certaines hypothèses simplificatrices prises dans l'expression de la cinétique.

Les précédentes hypothèses n'ont de sens qu'en vue d'intégrer les transferts de masse et de chaleur dans les volumes de simulations, c'est à dire au sein de Volumes de contrôle. Ainsi  $NUT_{ms}$  est calculé en assimilant les teneurs en eau 'a' et 'b' utilisées dans l'expression du flux masse  $F_m$ , à des constantes. Ces  $NUT$  s'éloignent de la réalité physique des transferts pour de grands volumes  $V_c$ .  $NUT_{ts}$  est calculé en postulant que les températures de l'air et du produit suivent une répartition linéaire dans l'espace ou le temps. Le modèle à courants croisés, en particulier, utilise le fait que les températures  $T_a$  et  $T_p$ , sont constantes le long de l'axe de  $V_c$  qui est orthogonal à leurs écoulements respectifs. Un tel modèle est dit 'brassé'.

La solution apportée dans ce texte passe par la mise en place de Modules d'Unités de Transferts qui donnent une description plus réaliste des phénomènes de transferts que les volumes  $V_c$ . Ces modules sont des réseaux de Volumes élémentaires dont la physique est détaillée, par exemple par l'introduction de la distinction entre matériau hygroscopique et non hygroscopique. Ces modules sont eux mêmes destinés à venir s'insérer dans des réseaux de M.U.T. servant de modèles à des séchoirs [5–7].

## 2. LES MODULES D'UNITÉS DE TRANSFERTS

Pour de plus grands Volumes de contrôle (efficacité fortes), et si l'on veut se rapprocher de la réalité physique des phénomènes, les hypothèses précédemment admises [4] doivent être remises en cause. Ainsi :

- $NUT_{ts}$  est modifié dans ce paragraphe, dans le cas où les courants d'air et de produit se croisent. Le modèle brassé est abandonné au profit d'un modèle plus proche de la physique du phénomène, où l'air est non brassé et le produit non brassé (températures non constantes dans les deux directions).
- Le modèle précédent de  $NUT_{ms}$  est remis en question par l'introduction de la distinction entre matériau hygroscopique et matériau non hygroscopique pour lesquels 'a' et 'b' sont des fonctions de la température et de la teneur en eau de l'air.

### 2.1. Transfert thermique 'non brassé' en courants croisés

Un volume de contrôle à courants croisés d'efficacité proche de  $1/(1+\omega)$  [4, Section 2] est insuffisamment décrit par un modèle d'échange thermique à courants brassés (températures de l'air et du produit constantes dans  $V_c$ , perpendiculairement à leur déplacement). L'air et le produit ne peuvent avoir une température constante sur toute la largeur ou toute la longueur de  $V_c$ , du fait de sa taille relativement grande. Pour pallier ce problème, nous adoptons une nouvelle hypothèse, plus réaliste pour des modules de grande taille. La physique d'un module est assimilée à celle d'un ensemble de volumes plus petits, notés  $v(i, j)$ , mis en série sur l'air et sur le produit (voir Fig. 1), définis par leur même efficacité  $e$ . On renforce cette hypothèse en considérant qu'ils tous la même capacité thermique  $\omega$ . Ce dernier point est phys-

NOMENCLATURE			
$a$	teneur en eau [b.s.]	$u_a$	vitesse de l'air dans l'amas de produit [m s <sup>-1</sup> ]
$b$	teneur en eau [b.s.]	$W$	teneur en eau moyenne [b.s.]
$c$	température intervenant dans la cinétique [K]	$W_{p1}^*$	$W_{p1}^* = (W_{p1} - a_1)/b_1$ [—]
$C$	chaleur massique humide [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	Symbols grecs	
$\Delta h_v$	différence d'enthalpie nécessaire à la vaporisation de l'eau liquide de la température $T_p$ à $T_a$ [J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	$\beta$	coefficient de concavité [—]
$e$	efficacité [—]	$\varepsilon_p$	porosité de l'amas [—]
$E$	efficacité globale [—]	$\Lambda$	pincement [—]
$Fm$	flux massique [kg m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\mu$	capacité massique (en valeur absolue) [—]
$Fm_{is}$	flux massique en phase isenthalpe [kg m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\xi$	inverse de la moyenne dans un M.U.T. des $W_{p1}^{*1-\beta}$ [—]
$F_0$	flux massique de référence [kg m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\rho$	masse volumique [kg m <sup>-3</sup> ]
$f_c$	fonction correction [—]	$\omega$	capacité thermique [—]
$h$	coefficient de convection [W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup> ]	$\Omega$	capacité thermique globale [—]
$HUT$	Hauteur d'Unité de Transfert [m]	Indices et exposants	
$I$	nombre adimensionnel permettant d'exprimer un $NUT$ [—]	1	entrée du fluide ou du produit
$J$	nombre adimensionnel permettant d'exprimer un $NUT$ [—]	2	sortie du fluide ou du produit
$l$	longueur d'un volume de contrôle [m]	a	air
$M$	capacité massique globale (en valeur absolue) [—]	cr	critique
$NUT$	Nombre d'Unité de Transfert [—]	em	énergie massique
$p$	périmètre d'échange, $p = A_c/l$ [m]	eq	équilibre
$q$	débit massique [kg s <sup>-1</sup> ]	ms	massique de séchage
$T$	température moyenne [—]	p	produit
		s	sec
		ts	thermique de séchage.

iquement acceptable si les températures  $T_a$  et  $T_p$  au sein du module ne sont pas susceptibles de trop se rapprocher, voire de se croiser, ce qui, à nouveau, limite la taille des modules.

2.1.1. Variables caractéristiques élémentaires

Les efficacités de refroidissement et de chauffage thermiques élémentaires chaque  $v(i, j)$  sont définies par

$$e = \frac{T_a(i, j) - T_a(i, j+1)}{T_a(i, j) - T_p(i, j)}$$

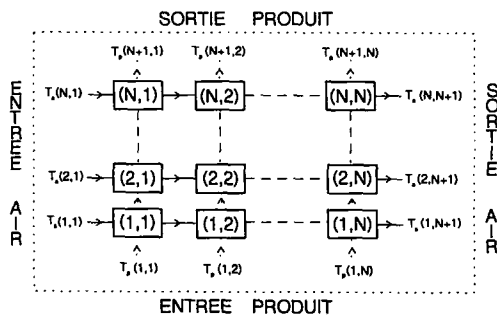


FIG. 1. Module d'Unités de Transferts formé de  $N^2$  volumes élémentaires.

$$\omega \cdot e = \frac{T_p(i+1, j) - T_p(i, j)}{T_a(i, j) - T_p(i, j)} \tag{1}$$

On définit les pincements thermiques de l'air et du produit dans l'assemblage à courants croisés comme

$$\Lambda_a(i, j) = \frac{T_a(i, j) - T_p(i, j)}{T_a(1, 1) - T_p(1, 1)} \quad \Lambda_a(i, j) = \omega \cdot \Lambda_a(i, j) \tag{2}$$

Le pincement thermique d'un module est donc le rapport entre  $(T_a - T_p)$  à l'entrée d'un volume  $v(i, j)$  et  $(T_a - T_p)$  à l'entrée du module. Il exprime le lien entre un volume  $v(i, j)$  et ceux qui l'entourent.

On peut exprimer :

$$\Lambda_a(1, 1) = 1$$

$$\Lambda_a(i, j) = 1 + (\psi - 1) \cdot \sum_{k=1}^{j-1} \Lambda_a(i, k) + (\phi - 1) \cdot \sum_{k=1}^{i-1} \Lambda_a(k, j) \tag{3}$$

avec

$$\psi = 1 - e \quad \phi = 1 - \omega \cdot e. \tag{4}$$

On en déduit :

$$\forall i \in [1, M], \quad \Lambda_a(1, j) = \psi^{j-1} \quad (5)$$

$$\forall j \in [1, N] \quad \Lambda_a(i, 1) = \phi^{i-1}. \quad (6)$$

Les autres valeurs de  $\Lambda_a(i, j)$  sont construites par récurrence sur la première ligne et la première colonne en utilisant (3). Ainsi  $\Lambda_a(i, j)$  et  $\Lambda_p(i, j)$  sont des formes quadratiques et  $\psi$  et  $\phi$ .

Le  $NUT_{is}$  d'un élément  $v(i, j)$  est une fonction des intégrales  $I_{is}$  et  $J_{is}$  définies précédemment [4, équations (13) et (14)]. Or, lorsque le nombre  $N$  de volumes tend vers l'infini, les volumes dont l'efficacité tend vers zéro, se comportent comme des volumes à courants croisés où l'air est brassé et le produit est brassé. Les termes  $I_{is}$  et  $J_{is}$  sont alors de l'ordre de  $e$  et  $\omega \cdot e$ .

2.1.2. Variables caractéristiques du M.U.T.

Les intégrales  $I_{is}$  et  $J_{is}$  d'un M.U.T. sont définies comme des sommes de celles des volumes  $v(i, j)$  :

$$I_{is} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e = N \cdot e \quad J_{is} = \omega \cdot I_{is}. \quad (7)$$

On définit l'efficacité de refroidissement et la capacité thermique équivalentes du M.U.T.

$$E_{is} = \frac{e}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Lambda_a(i, j) \quad \Omega = \omega. \quad (8)$$

Considérant les équations (4), (7) et (8), on obtient la relation reliant  $E_{is}$ ,  $I_{is}$  et  $\Omega$

$$E_{is} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{I_{is}}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Lambda_a(i, j) \right)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \psi = 1 - \frac{I_{is}}{N} \\ \phi = 1 - \Omega \cdot \frac{I_{is}}{N} \end{cases}. \quad (9)$$

2.2. Transfert massique dans un M.U.T.

2.2.1. Transfert massique dans un volume élémentaire

2.2.1.1. Mise en place. Le calcul de  $NUT_{ms}$  dans un volume élémentaire utilise dans ce texte une expression plus précise de  $Fm$  [4, Section 1]. Les termes  $a$  et  $b$  intervenant dans son expression ne sont pas assimilés à des constantes. Nous sommes conduits pour exprimer leurs variations  $da$  et  $db$  dans le volume élémentaire considéré, à envisager plusieurs configurations :

—Les matériaux hygroscopiques, parviennent à un flux  $Fm$  nul, alors que  $W_p$  est non nul. On a alors

$$a = W_{eq} \quad b = W_i - W_{eq}. \quad (10)$$

—Les matériaux non hygroscopiques, par contre, parviennent à perdre la totalité de leur eau. On pose alors

$$a = 0 \quad b = W_{cr}. \quad (11)$$

Les termes  $W_{eq}$  et  $W_{cr}$  sont des fonctions de  $T_a$  et  $W_a$  en particulier et les variations  $da$  et  $db$ , sont des

fonctions de  $dW_{eq}$  ou  $dW_{cr}$ . On pose par analogie avec  $\mu$  :

$$\mu_{eq} = - \frac{dW_{eq}}{dW_p} = \mu \cdot \frac{\partial W_{eq}}{\partial W_a} - \frac{\partial W_{eq}}{\partial T_a} \cdot \left( \frac{dW_p}{dT_a} \right)^{-1} \quad (12)$$

$$\mu_{cr} = - \frac{dW_{cr}}{dW_p} = \mu \cdot \frac{\partial W_{cr}}{\partial W_a} - \frac{\partial W_{cr}}{\partial T_a} \cdot \left( \frac{dW_p}{dT_a} \right)^{-1}. \quad (13)$$

Connaissant les relations reliant  $W_{eq}$  et  $W_{cr}$  à  $T_a$  et  $W_a$ , on est capable de ramener  $\mu_{eq}$  ou  $\mu_{cr}$  à des expressions, des températures et teneurs en eau de l'air en entrée de l'élément considéré, des capacités thermique ou massique et des efficacités de l'élément considéré. La relation obtenue est du type de celle reliant la capacité thermique à la capacité massique et au rapport  $dW_p/dT_a$  [4, équation (20)].

Par analogie avec le rapport de capacité massique  $|\mu|$  défini précédemment [4, Section 1], on appelle capacité massique d'équilibre et capacité massique critique :

$$|\mu_{eq}| = \frac{W_{eq2} - W_{eq1}}{W_{p1} - W_{p2}} \quad |\mu_{cr}| = \frac{W_{cr2} - W_{cr1}}{W_{p1} - W_{p2}}. \quad (14)$$

2.2.1.2. Calcul de  $NUT_{ms}$ . Le calcul de  $NUT_{ms}$  dans un volume élémentaire destiné à être inséré dans l'assemblage d'un M.U.T. est fait en supposant une répartition linéaire de l'air et du produit.

- Déplacements à co-courants (voir Tableau 1).
- Déplacements à courants croisés: Les caractéristiques de l'air et du produit sont gardées constantes le long de l'axe des ordonnées et des abscisses du volume. Cette hypothèse, très éloignée de la réalité du phénomène, conduit à des résultats qui n'ont de sens que sur de petits éléments, et doit être abandonnée pour de plus grands volumes au profit du modèle 'non brassé', développé par la suite au paragraphe 2.2.2.

On remarque de plus que, lorsque  $e$  est proche de la valeur zéro, quel que soit le type d'écoulement :

$$NUT_{ms} \simeq W_p^{*1-\beta} \cdot e \quad (15)$$

2.2.1.3. Calcul de  $HUT_{ms}$  [4, Section 2]. La valeur de  $HUT_{ms}$  évolue au sein d'un volume élémentaire, avec des termes comme  $b$ ,  $F_0$  (qui dépend de la teneur en eau et de la vitesse de l'air), et surtout avec le terme  $\exp(-c/T_a)$ . Nous la calculons dans ce paragraphe, en tenant uniquement compte de l'influence de ce dernier terme, à partir de sa définition posée précédemment [4, équation (29)]. Si on fait l'hypothèse d'un répartition linéaire de la température de l'air le long de l'abscisse du volume considéré, c'est à dire

$$T_s = \frac{T_{a2} - T_{a1}}{l} \cdot x - T_{a1}.$$

$HUT_{ms}$  peut s'exprimer comme

Tableau 1. Le Nombre d'Unités de Transfert massique de séchage dans le cas d'une circulation de l'air et du produit à co-courants

Co-courants	
air/prod	
$W_p(x)$	$W_p = \frac{W_{p2} - W_{p1}}{L_1} \cdot x + W_{p1}$
$W_{eq}(y)$ OU $W_{cr}(y)$	$W_{eq} = \frac{W_{eq2} - W_{eq1}}{L_1} \cdot x + W_{eq1} \quad W_{cr} = \frac{W_{cr2} - W_{cr1}}{L_1} \cdot x + W_{cr1}$
<i>NUT<sub>ms</sub></i> fonction de $e_{ms}$ , $\mu_{eq}$ et $W_{p1}^*$	
<i>NUT<sub>ms</sub></i>	$\frac{\mu_{eq} \cdot (1 - W_{p1}^*) + 1}{\mu_{eq}^2} \cdot I_0 \left( W_{p1}^* \cdot \left( \frac{1 - e_{ms} \cdot (1 - \mu_{eq})}{1 - \mu_{eq} \cdot e_{ms} \cdot W_{p1}^*} \right), W_{p1}^* \right)$
$I_n(U, V)$	$\frac{1}{n+1-\beta} \cdot \left[ X^{n+1-\beta} \cdot \left( X - \frac{1+\mu_{eq}}{\mu_{eq}} \right)^{-2-n} \right]_U^V + \frac{2+x}{n+1-\beta} \cdot I_{n+1}(U, V)$
<i>NUT<sub>ms</sub></i> fonction de $e_{ms}$ , $\mu_{cr}$ et $W_{p1}$	
<i>NUT<sub>ms</sub></i>	$\frac{\mu_{cr} \cdot W_{p1}^* + 1}{\mu_{cr}^2} \cdot I_0 \left( W_{p1}^* \cdot \left( \frac{1 - e_{ms}}{1 + \mu_{cr} \cdot e_{ms} \cdot W_{p1}^*} \right), W_{p1}^* \right)$
$I_n(U, V)$	$\frac{1}{n+1-\beta} \cdot \left[ X^{n+1-\beta} \cdot \left( X + \frac{1}{\mu_{cr}} \right)^{-2-n} \right]_U^V + \frac{2+n}{n+1-\beta} \cdot I_{n+1}(U, V)$

$$HUT_{ms} = \frac{\mu \cdot b \cdot q_{as}}{p \cdot F_0 \cdot \exp\left(-\frac{c}{T_{a1}}\right)} \cdot f_c(e_{cm}) \quad (16)$$

Où  $e_{cm}$  est l'efficacité dite d'énergie massique, définie comme

$$e_{cm} = \frac{T_{a1} - T_{a2}}{T_{a1}} \quad (17)$$

La justification de cette définition, dépasse le cadre de ce texte, et ' $e_{cm}$ ' peut être assimilée à un intermédiaire de calcul. Elle se ramène à une fonction de l'efficacité  $e_s$  et de termes, comme le pincement thermique, qui sont liés à la nature de l'assemblage dans lequel est inséré le volume élémentaire. Ceci met en relief le fait que l'intégration des transferts massiques nécessite l'introduction de nombres adimensionnels, autres que des efficacités et des capacités, qui sont directement attachés à la notion de réseau. Le pincement est un de ces termes.

De même l'expression de  $f_c(e_{cm})$  qui a pu être intégrée analytiquement n'est pas donnée ici. Elle est paramétrée par le rapport  $c/T_{a1}$ , et est présentée Fig. 2, pour trois valeurs de ce rapport.

2.2.2. Transfert massique 'non brassé' en courants croisés

2.2.2.1. Calcul du  $NUT_{ms}$  d'un M.U.T. en courants croisés. On fait l'hypothèse que le M.U.T. considéré

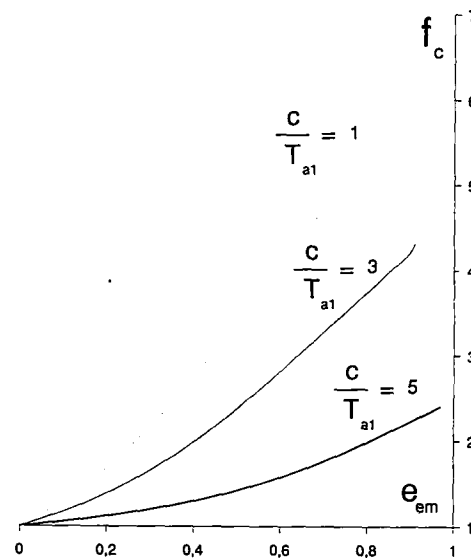


FIG. 2.  $f_c(e_{cm})$  pour trois valeurs de  $c/T_{a1}$ .

est constitué d'un ensemble de volume élémentaires  $v(i, j)$  mis en série sur l'air et sur le produit, d'efficacité massique de séchage  $e$  constante. Le module est étudié pour des valeurs constantes de  $\mu_{eq}$  et  $\mu_{cr}$ .

De la même manière que pour le calcul thermique analogue de celui-ci, on définit les pincements massiques en courants croisés

$$\Lambda_p(i, j) = \frac{W_p(i, j) - W_{eq}(i, j)}{W_p(1, 1) - W_{eq}(1, 1)} \quad (18)$$

Selon que le matériau est hygroscopique ou non :

$$\Lambda_a(i, j) = \mu_{eq} \cdot \Lambda_p(i, j) \quad \Lambda_a(i, j) = \mu_{cr} \cdot \Lambda_p(i, j) \quad (19)$$

On retrouve la relation (3) sous la forme

$$\Lambda_p(i, j) = 1 + (\psi - 1) \cdot \sum_{k=1}^{j-1} \Lambda_p(i, k) + (\phi - 1) \cdot \sum_{k=1}^{i-1} \Lambda_p(k, j) \quad (20)$$

avec

$$\psi = 1 - \mu_{eq} \cdot e \quad (\text{ou } \psi = 1 - \mu_{cr} \cdot e) \quad \phi = 1 - e. \quad (21)$$

Le  $NUT_{ms}$  équivalent d'un M.U.T. est défini comme une somme de celles des volumes  $v(i, j)$ , définies par l'équation (15)

$$NUT_{ms} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_p^{*1-\beta} \cdot e. \quad (22)$$

$E_{ms}$  l'efficacité massique de séchage et  $M_{eq}$  (ou  $M_{cr}$ ) la capacité massique d'équilibre (ou capacité massique critique) équivalente d'un M.U.T., s'expriment comme

$$E_{ms} = \frac{e}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Lambda_p(i, j) \quad M_{eq} = \mu_{eq} \quad (\text{ou } M_{cr} = \mu_{cr}). \quad (23)$$

Le passage à la limite de l'équation  $NUT_{ms}$  ( $e_{ms}, \mu_{eq}$ ) ( $N \rightarrow \infty, e \rightarrow 0$ ), conduit à l'équation  $NUT_{ms}$  ( $E_{ms}, M_{eq}$ ) en courants croisés, l'air non brassé et le produit non brassé. A l'aide des équations (22) et (23), on déduit une relation analogue à (9) :

$$E_{ms} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \xi \cdot \frac{NUT_{ms}}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Lambda_p(i, j) \right) \quad (24)$$

avec

$$\begin{cases} \psi = 1 - M_{eq} \cdot \xi \cdot \frac{NUT_{ms}}{N} \\ \phi = 1 - \xi \cdot \frac{NUT_{ms}}{N} \end{cases}$$

ou,

$$\begin{cases} \psi = 1 - M_{cr} \cdot \xi \cdot \frac{NUT_{ms}}{N} \\ \phi = 1 - \xi \cdot \frac{NUT_{ms}}{N} \end{cases}$$

et

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_p^{*1-\beta}. \quad (25)$$

Le terme  $\xi$  est à rapprocher du commentaire en fin de paragraphe 2.2.1.3. Son calcul nécessite l'introduction de nouveaux nombres adimensionnels attachés à la notion de réseau.

2.2.2.2. *Calcul du  $HUT_{ms}$  d'un M.U.T. en courants croisés.* Le calcul du  $HUT_{ms}$  d'un assemblage d'éléments, qui s'inspire en tout point de ce qui a été fait ci-dessus, sort du cadre de ce texte. Son calcul nécessite en effet l'intégration de phénomènes thermiques ( $T_a$ ), mais aussi massiques ( $b$  et  $W_a$  qui intervient dans  $F_0$ ). Néanmoins, parce que son expression ne fait pas intervenir d'écarts de températures, l'expression du  $HUT_{ms}$  élémentaire est proche de celle d'un M.U.T., si celui-ci reste de dimension modeste.

### 2.3. Assemblage à courants croisés

Nous nous proposons dans ce paragraphe de justifier les analogies observables entre les transferts thermiques et massiques. Ces analogies trouvent pour une part leur origine dans la structure des transferts, et se manifestent, dans notre modélisation au travers de l'expression du pincement des éléments d'un module. Etant donné un assemblage d'éléments dans un module, le pincement, massique ou thermique, d'un élément peut être exprimé indépendamment de tout modèle de transfert (cinétique, coefficient de convection). Malgré cela, le pincement conditionne en grande partie le comportement du module, et est un facteur essentiel du transfert.

#### 2.3.1. Pincements dans un M.U.T. à courants croisés

Nous avons défini les pincements de volumes élémentaires dans un M.U.T. pour deux phénomènes physiques distincts :

- Pour les phénomènes thermiques,  $\Lambda_a(i, j)$  et  $\Lambda_p(i, j)$  sont définis par l'expression (2), et sont des formes quadratiques en  $\psi$  et  $\phi$  calculables grâce à la relation récurrente (3).
- Pour les phénomènes massiques,  $\Lambda_a(i, j)$  et  $\Lambda_p(i, j)$  sont définis par les expressions (18) et (19), et sont des formes quadratiques en  $\psi$  et  $\phi$  calculables grâce à la relation récurrente (20).

Les équations (3) et (20) montrent à l'évidence que  $\Lambda_a(i, j)$  en thermique et  $\Lambda_p(i, j)$  en massique sont une même forme quadratique,  $\Lambda(i, j)$ , de  $\psi$  et  $\phi$ . Pour que dans la suite de ce paragraphe  $\omega$  et  $\mu_{eq}$  (ou  $\mu_{cr}$ ) jouent le même rôle, nous posons :

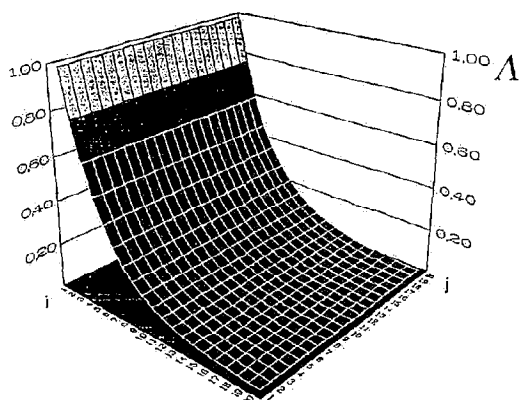


FIG. 3.  $\Lambda(i, j)$  avec  $(I_{ts}; \Omega) = (5; 0)$ .

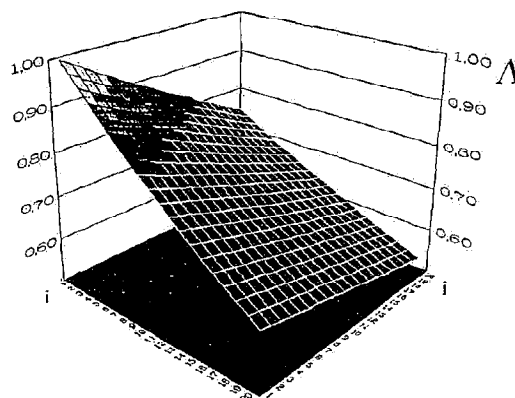


FIG. 4.  $\Lambda(i, j)$  avec  $(I_{ts}; \Omega) = (0,5; 0,6)$ .

—En thermique :

$$\Lambda(i, j) = \Lambda_a(i, j) \quad \text{avec, } (\psi; \phi) = (1 - e; 1 - \omega e)$$

—En massique

$$\Lambda(i, j) = \Lambda_p(j, i) \quad \text{avec, } (\psi; \phi) = (1 - e; 1 - \mu_{cq} e)$$

ou,  $(\psi; \phi) = (1 - e; 1 - \mu_{cr} e)$ .

Ainsi pour les deux transferts

$$\Lambda(i, j) = 1 + (\psi - 1) \cdot \sum_{k=1}^{j-1} \Lambda(i, k) + (\phi - 1) \cdot \sum_{k=1}^{i-1} \Lambda(k, j). \quad (26)$$

Les équations (9) et (24) s'expriment alors comme

$$E_{ts} = I_{ts} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Lambda(i, j)}{N^2} \quad (27)$$

$$E_{ms} = \xi \cdot NUT_{ms} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\Lambda(i, j)}{N^2}. \quad (28)$$

Les équations (26), (27) et (28), mettent en valeur, la similitude des transferts thermiques et massiques, et le rôle de  $\Lambda(i, j)$ . On a une analogie entre :  $\Omega$  et  $M_{cq}$  (ou  $M_{cr}$ );  $E_{ts}$  et  $E_{ms}$ ;  $I_{ts}$  et  $\xi \cdot NUT_{ms}$ .

*Représentation graphique des termes  $\Lambda(i, j)$*

Les analogies exprimées ci-dessus nous permettent d'étudier simultanément les transferts thermiques et massiques pour des écoulements à courants croisés. *Tout ce qui est fait dans ce paragraphe pour des échanges thermiques peut être immédiatement transposé à des échanges massiques en permutant les paramètres  $\Omega$  et  $M_{cq}$  (ou  $M_{cr}$ ),  $E_{ts}$  et  $E_{ms}$ ,  $I_{ts}$  et  $\xi \cdot NUT_{ms}$ .*

Les Figs. 3, 4 et 5 montrent les termes de  $\Lambda(i, j)$ , pour différentes valeurs de  $I_{ts}$  et  $\Omega$ . Ces trois figures font ressortir l'influence respective de ces deux coefficients :

Figure 3 :  $I_{ts}$  est élevé (M.U.T. grand), et  $\Omega$  est nul

$$I_{ts} = 5 \quad \Omega = 0.$$

Du fait de la grande taille du M.U.T., la surface de la Fig. 3 est gauche. Cela montre que plus on observe de grands volumes de séchoir, moins les températures

de l'air et du produit ont une répartition linéaire dans l'espace. On est donc loin du domaine de validité du modèle brassé de répartition de température.

La température du produit et  $\Lambda(i, j)$  quelque soit  $j$ , sont constantes dans le M.U.T., car  $\Omega$  est nul.

Figure 4 :  $I_{ts}$  est faible (M.U.T. petit), et  $\Omega$  est non nul

$$I_{ts} = 0,5 \quad \Omega = 0,6.$$

Le M.U.T. étant petit, la surface est proche d'un plan. Les températures suivent une répartition quasi linéaire, et sont proches du modèle brassé. Le terme  $\Omega$  est non nul. Sa valeur joue sur l'inclinaison de la surface  $\Lambda(i, j)$ .

Figure 5 :  $I_{ts}$  est élevé (M.U.T. grand), et  $\Omega$  est non nul

$$I_{ts} = 5 \quad \Omega = 0,6.$$

Cette figure combine les deux configurations précédentes. La surface est fortement gauche, aussi bien le long de l'axe à  $i$  constant que le long de l'axe à  $j$  constant. Le M.U.T. considéré est grand, et le terme  $\Omega$  est non nul.

L'influence des termes  $I_{ts}$  et  $\Omega$  s'explique par le fait que si  $N$  est proche de l'infini :

$$\Lambda_a(1, n) \simeq e^{-I_{ts}} \quad \Lambda_a(n, 1) \simeq e^{-\Omega I_{ts}}. \quad (29)$$

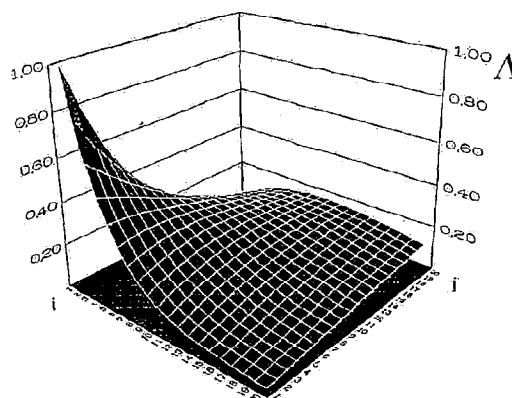


FIG. 5.  $\Lambda(i, j)$  avec  $(I_{ts}; \Omega) = (5; 0,6)$ .

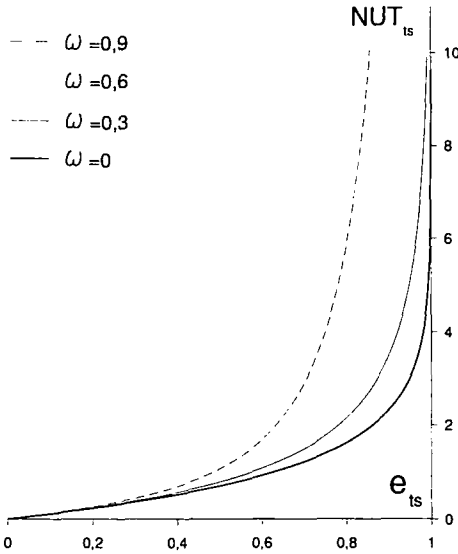


FIG. 6.  $NUT_{ts}(e_{ts})$  pour quatre valeurs du rapport de capacité  $\omega$ . Modèle à air non brassé et produit non brassé.

2.3.2. Fonctions de transfert en courants croisés

Une étude numérique de  $I_{ts}(E_{ts})$  grâce à (9) donne les courbes de la Fig. 6 pour quatre valeurs de  $\Omega$ . Cette figure peut aussi être interprétée comme  $\xi \cdot NUT_{ms}(E_{ms})$  paramétrée par  $M_{eq}$  ou  $M_{cr}$ .

3. ILLUSTRATION : OBSERVATION D'UN SÉCHOIR A TAPIS

Dans ce paragraphe nous présentons l'application du concept de Module d'Unités de Transferts à un séchoir réunissant un ensemble de huit tapis [8], entre lesquels circule de l'air et du produit. Nous observons ce séchoir grâce aux grandeurs introduites jusqu'ici. Cette observation tend à montrer que les M.U.T., insérés dans un réseau, sont un outil pouvant participer à la conception des séchoirs.

3.1. Présentation du séchoir : (Fig. 7 et Tableau 2)

Le séchoir comprend huit tapis de sept mètres chacun, qui transportent un produit pâteux. Ce produit est liché par un flux d'air chaud alternativement à contre-courants et à co-courants.

Nous choisissons de modéliser le séchoir comme un ensemble de 80 modules (10 par tapis), et nous observons son comportement à l'aide d'un code de simulation qui nous délivre les températures et les teneurs en eau, de l'air et du produit, en régime permanent dans chaque module.

Les tapis à contre-courants (respectivement co-courants) sont modélisés par des assemblages à contre-courants (respectivement co-courants) d'éléments à contre-courants (respectivement co-courants). Chaque élément possède une entrée d'air et de produit (variables indicées 1), et une sortie d'air et de produit (variables indicées 2). Ainsi les efficacités thermiques

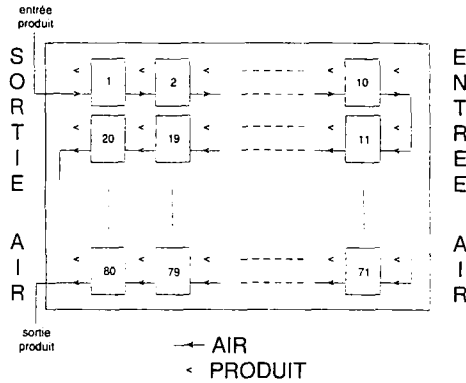


FIG. 7. Réseau de 80 MUT, servant à la modélisation d'un séchoir de huit tapis.

et massiques de chaque module sont définies par

$$e_{ts}(i) = \frac{T_{a1}(i) - T_{a2}(i)}{T_{a1}(i) - T_{p1}(i)}$$

$$\omega(i) \cdot e_{ts}(i) = \frac{T_{p2}(i) - T_{p1}(i)}{T_{a1}(i) - T_{p1}(i)} \quad (30)$$

$$e_{ms}(i) = \frac{W_{p1}(i) - W_{p2}(i)}{W_{p1}(i)} \quad (31)$$

3.2. Etude du séchoir

Les grandeurs introduites précédemment, comme les efficacités thermiques ou massiques, les Nombres et les Hauteurs d'Unités de Transferts, les capacités massiques et thermiques, nous servent à observer et à commenter le comportement du séchoir. Leur évolution tout au long du séchoir est obtenue à partir du fichier résultat d'un code de simulation. Nous assimilons, pour alléger la présentation de ce paragraphe et parce que nous ne sommes intéressés ici que par des problèmes qualitatifs, les paramètres de transferts  $C_u$ ,  $C_p$  et  $\Delta h_v$  à des constantes. Ces paramètres évoluent en réalité légèrement d'un module à un autre.

Rapport de capacité massique :

Le rapport de capacité massique du séchoir, que l'on a calculé comme le rapport des débits de produit sec et d'air sec, est [4, Section 1]

Tableau 2. Conditions de simulation du séchoir à tapis

Paramètre	Valeur	Unité
Température du produit en entrée	13	°C
Teneur en eau de départ	0,6	b.s.
Vitesse des tapis	0,041	m s <sup>-1</sup>
Température de l'air en entrée	100	°C
Vitesse de l'air en entrée	5	m s <sup>-1</sup>
Epaisseur d'une couche de produit	5	mm
Débit de produit sec	26,6	T/j
Débit d'air	15800	(n) m <sup>3</sup> h <sup>-1</sup>
Puissance à fournir à l'air	494	kW
Coefficient d'échange thermique	224	W m <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup>

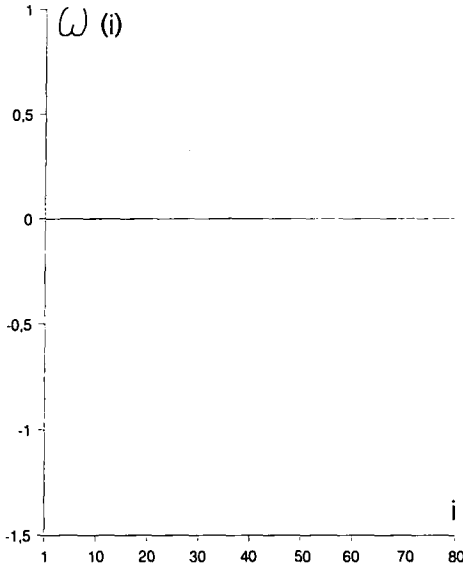


FIG. 8. Evolution du rapport de capacité thermique au sein des différents MUT du réseau.

$$|\mu| = 0,468.$$

*Rapport de capacité thermique :*

La capacité thermique  $\omega(i)$  est présentée Fig. 8. On remarque que  $\omega(i)$  prend souvent des valeurs négatives, ce qui signifie que le produit se refroidit. Le transfert de masse puise une partie de l'énergie nécessaire à l'évaporation dans l'énergie calorifique stockée dans le produit. Quels que soient les écoulements relatifs d'air et de produit, et pour le  $i^{\text{ème}}$  module [4, Section 2]

$$\frac{e_{ms}(i)}{e_{is}(i)} = \left( 1 - |\mu| \cdot \frac{C_p}{C_a} \cdot \omega(i) \right) \cdot \frac{C_a \cdot (T_{a1}(i) - T_{p1}(i))}{|\mu| \cdot \Delta h_v \cdot W_{p1}(i)}. \quad (32)$$

*Calcul de  $HUT_{is}$  :*

La hauteur  $HUT_{is}$ , sachant que la largeur utile des tapis est de 1,5 mètres ( $p$ ), peut se calculer comme

$$HUT_{is} = 2 \text{ m.}$$

Chaque module a une longueur de 0,7 m, qui correspond à 0,35 unité de transfert. On observe sur la Fig. 9, la relation  $NUT_{is}(e_{is}, \omega)$ . Le comportement thermique des modules que nous observons se trouve à l'intersection de ces courbes et de la droite d'ordonnée à 0,35.

*L'efficacité thermique :*

La fonction  $NUT_{is}(e_{is}, \omega)$  est représentée Fig. 9, pour des efficacités comprises entre 0,2 et 0,4. On observe, que pour une même valeur de  $NUT_{is}$  l'efficacité thermique d'un séchoir contre-courants est supérieure à celle d'un séchoir co-courant, si  $\omega(i)$  est positif ( $dT_p > 0$ ). On trouve le phénomène inverse pour des valeurs négatives de  $\omega(i)$  ( $dT_p < 0$ ). On en déduit que, quelque soit le type de séchoir, et pour une même valeur de  $NUT_{is}$  :

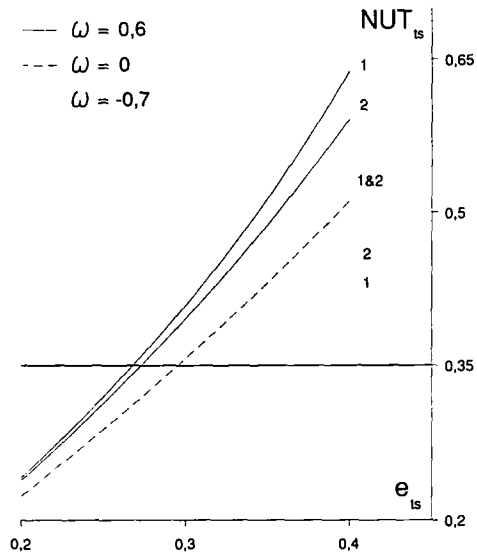


FIG. 9.  $NUT_{is}(e_{is})$  pour trois valeurs du rapport de capacité thermique, et pour deux configurations de circulations : co-courants et contre-courants.

—Un module à contre-courants a une efficacité thermique supérieure à celle d'un séchoir à co-courants, lorsque le produit s'échauffe.

—Un module à contre-courants a une efficacité thermique inférieure à celle d'un séchoir à co-courants, lorsque le produit se refroidit.

L'évolution de  $e_{is}(i)$  dans le séchoir (voir Fig. 9), est déduite de celle de  $\omega(i)$  :

—Si le produit et l'air sont à co-courants, on déduit de l'expression de  $NUT_{is}(e_{is}, \omega)$ , la fonction inverse :

$$e_{is}(i) = \frac{1 - e^{-(1+\omega(i))NUT_{is}}}{1 + \omega(i)}. \quad (33)$$

—Si le produit et l'air sont à contre-courants, on déduit de l'expression de  $NUT_{is}(e_{is}, \omega)$ , la fonction inverse :

$$e_{is}(i) = \frac{1 - e^{-(1-\omega(i))NUT_{is}}}{1 - \omega(i) \cdot e^{-(1-\omega(i))NUT_{is}}}. \quad (34)$$

*L'efficacité massique :*

On peut exprimer, grâce à l'équation (32),  $e_{ms}(i)$  comme le produit de trois termes (@1), (@2) et (@3), qui ont un rôle très différent, tout au long du séchoir :

$$(@1) = \left( \frac{C_a \cdot (T_{a1} - T_{p1})}{|\mu| \cdot \Delta h_v \cdot W_{p1}} \right) (i)$$

$$(@2) = 1 - |\mu| \cdot \frac{C_p}{C_a} \cdot \omega(i) \quad (@3) = e_{is}(i). \quad (35)$$

(@1) est uniquement fonction des variables caractéristique en entrée du module  $i$ .

(@2) diminue avec l'augmentation de  $\omega(i)$ , et est



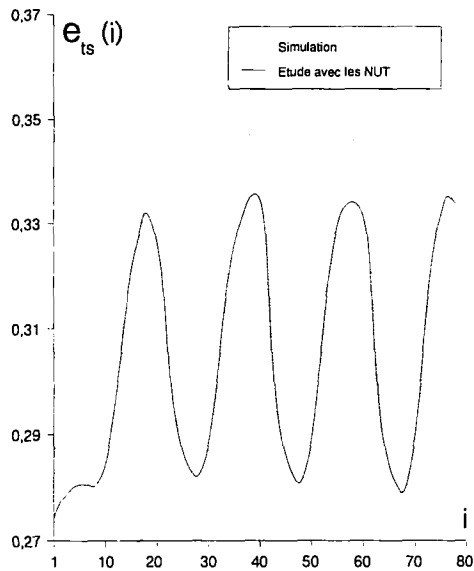


FIG. 10. Evolution de l'efficacité thermique de séchage dans les MUT du réseau.

indépendant du déplacement relatif de l'air et du produit, dans le M.U.T.

(@3) diminue avec l'augmentation de  $\omega(i)$ , et dépend du choix du déplacement relatif de l'air et du produit.

#### Analyse du comportement massique du séchoir

Sur le premier tapis, le produit s'échauffe et  $e_{ms}(i)$  augmente avec  $i$ . Compte tenu des valeurs positives de  $\omega(i)$ , le choix d'un tapis à contre-courants favorise le transfert massique.

Le terme (@3) pour un tapis à co-courants sont plus importants lorsque le produit se refroidit. Ces tapis libèrent l'énergie calorifique qu'ils ont accumulé sur le tapis précédent. Le terme (@2) augmente d'autant plus que  $\omega(i)$  est négatif, et freine la diminution de  $e_{ms}(i)$ .

Les tapis à contre-courants utilisant une partie de la chaleur apportée par l'air pour réchauffer le produit. Pour ce faire,  $\omega(i)$  augmente, ce qui diminue le terme (@2).

### 3.3. Analyse

Ainsi la configuration du séchoir, et en particulier l'alternance des séchoirs à contre-courants et à co-courants, permet de faire osciller la température du produit, et donc la capacité thermique. Le choix de cette alternance peut sembler judicieux, dans la mesure où les séchoirs à co-courants sont utilisés lorsque la capacité thermique décroît, et les séchoirs à contre-courants lorsqu'elle augmente. On imagine mal, par exemple, utiliser un séchoir à co-courants pour le premier tapis, son efficacité massique serait trop faible. *Ce type d'approche, met en valeur les défauts ou les qualités d'une conception préexistante, et avance des arguments pouvant conduire à l'améliorer.* Les NUT sont ainsi un outil pouvant participer à

l'établissement de règles dites 'expertes', qui orienteraient la conception des séchoirs vers des solutions favorables à leur optimisation.

On ne peut, à la seule vue des résultats du paragraphe 3.2, affirmer que cette configuration est une des meilleures envisageable. En effet, d'une configuration à l'autre, la capacité thermique évolue différemment dans le séchoir, et on peut imaginer qu'il existe des solutions plus favorables au transfert de masse. Les nombres adimensionnels mis en valeur par la théorie des N.U.T. nous permettent, connaissant les variables caractéristiques des transferts en entrée d'un module et l'écoulement relatif de l'air et du produit dans ce module, de critiquer sa configuration. *Néanmoins, ils ne nous permettent pas d'ors et déjà de proposer une stratégie d'assemblage de ces modules visant à optimiser le séchoir qu'ils modélisent.* On peut cependant imaginer que la construction de cette stratégie passe par un approfondissement de la connaissance des réseaux dont nous avons ébauché la mise en place dans le second paragraphe.

## 4. CONCLUSION

Les Modules d'Unités de Transfert sont un outil d'observation du comportement d'un volume élémentaire de séchoir :

- Ils isolent les phénomènes spécifiques, thermiques ou massiques, qui prennent naissance dans ces volumes.
- Ils introduisent des grandeurs inspirées de la thermodynamique : les efficacités.
- Ils permettent une critique constructive du choix du type de ces modules et de leur agencement dans le séchoir.

Ainsi, inséré dans un algorithme de conception de séchoir, le concept de M.U.T. peut guider le choix de la nature et de la configuration des éléments de cet appareil. Il peut permettre à un code de construire élément par élément un réseau de modules dont le comportement se rapproche de celui du séchoir réel. L'analogie des comportements sera d'autant meilleure que les efficacités choisies seront faibles et les modules nombreux. Les N.U.T. ne peuvent orienter la conception vers sa solution optimale, mais peuvent la diriger vers des solutions favorables, en critiquant la configuration obtenue à chaque itération de la conception.

## BIBLIOGRAPHIE

1. W. Kays et A. London, *Compact Heat Exchangers*. McGraw-Hill, New York (1984, 1964, 1955).
2. P. Le Goff, Analyse thermodynamique et mécanique des économies d'énergie. Dans *Energétique industrielle* (1), pp. 177-250, Edition Technique et Documentation (1982).
3. P. Le Goff, Applications en génie chimique, échangeurs, séparateurs, réacteurs. Dans *Energétique industrielle* (3), Edition Technique et Documentation (1982).
4. P. Sebastian, J. P. Nadeau et J. R. Puiggali, Les Nombres

- d'Unités de Transfert, thermique, massique, outils rapides de simulation de séchoirs, *Int. J. Heat Mass Transfer* **36**, 1773–1782 (1993).
5. S. G. Kandlikar et R. K. Shah, Asymptotic effectiveness-NTU formulas for multipass plate heat exchangers. *J. Heat Transfer* **111**, 314–321 (1989).
  6. M. El-Halwagi et V. Manousiouthakis, Synthesis of mass exchange networks, *A.I.Ch.E. JI* **35**, 1233–1244 (1989).
  7. A. Pignotti, Linear matrix operator formalism for basic heat exchanger thermal design, *J. Heat Transfer* **110**, 297–303 (1988).
  8. J. P. Nadeau et J. R. Puiggali, La simulation une aide à la conception : application à un séchoir multi-tapis. Actes des rencontres "Innovation énergétique et industrie agro-alimentaire", CEE-DGE et AFME (1990).